Διωνυμική κατανομή: 14/11/17

Διωνυμικό Τ.Π. ← τυχαίο πείραμα

Δ1 n-επαναλήψεων μιας διαδικασίας

Δ2 Κάθε επανάληψη $\nearrow E$, $\searrow A$

Δ3 Επαναλήψεις ανεξάρτητες

Δ4 $p = P(E)$ αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη
(p: πιθανότητα επιτυχίας)

• Έστω X πλήθος των E στις n-επαναλήψεις
τιμές X, $x = 0, 1, \dots n$

Αποδείξαμε: $P_X(x) = \binom{n}{x} p^x \, q^{n-x}$, $q = 1 - p = P(A)$

$x = 0, 1, \dots, n$

Παράδειγμα: Τελικό ζάρι → 3 φορές (προκαθορισμένως αριθμός) Δ1 ✓ Δ2 ✓ Δ3 ✓ Δ4 ✓

α) P(ακριβώς 3 φορές αποτ. ≥ 4)

β) P(το πολύ μια φορά αποτ ≥ 4)

E = {Αποτ. ≥ 4 σε όποια δοκιμή ρίψη}

Έστω X πλήθος των επιτυχιών E στις 3 ρίψεις

$$X \sim B\left(n=3,\ p = P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)$$

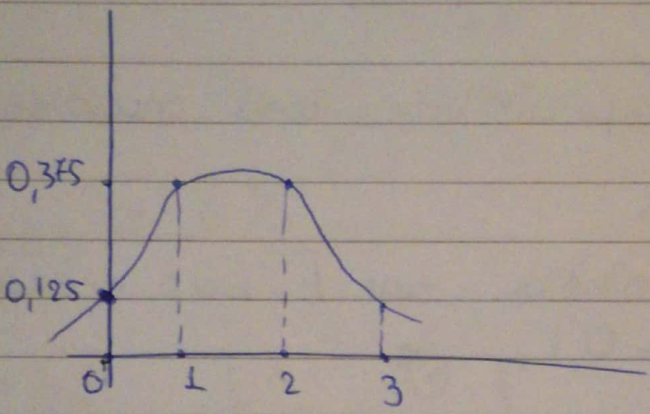
α) $P(X=3) = P_X(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

β) $P(x \leq 1) = P(x=0 \text{ ή } x=1) \xrightarrow[\text{Kolmogorov}]{3^o \text{ αξίωμα}} P(x=0)+P(x=1)$

$$= P_x(0) + P_x(1) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} + \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

Παρατηρήσεις:

α) $X \sim B(3, 1/2)$, $P_x(x) = \binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$, $x = 0,1,2$...



ραβδόγραμμα

β) ∃ πίνακες για υπολογισμό διωνυμικών πιθανοτήτων (τέλος βιβλίου-σημειώσεων)

Παράδειγμα:
10 ερωτήσεις < 4 απαντήσεις, 1 σωστή
Έχω ανεξαρτησία

Κάθε σωστή απάντηση → 1 μονάδα

α) P(να πάρει δέκα)
β) P(περάσει το μάθημα)
γ) P(να πάρει 0)

E = {να διαλέξει τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση}

Έστω X το πλήθος των "E" στις 10 ερωτήσεις

$$X \sim B(\underset{\text{επαναλήψεις}}{10}, \ p = P(E) = 1/4)$$

$$P_X(x) = \binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{10-x}, \quad x=0,1,\dots 10$$

α) $P(\text{δέκα}) = P(X=10) = P_X(10) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-10} \simeq 0$

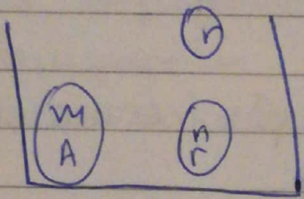
β) $P(\text{να περάσει}) = P(X \geq 5) = \sum_{x=5}^{10} P_X(x) = \sum_{x=5}^{10}\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} =$

$0{,}0781$

γ) $P(\text{να πάρει } 0) = P(X=0) = P_X(0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-0} =$

$0{,}0563 \simeq 6\%$

Παράδειγμα:



με επανατοποθέτηση

$$P\left(\begin{array}{l}\text{να } \exists \text{ ακριβώς } k\text{-άνδρες} \\ \text{στο δείγμα μεγέθους } r \\ (0 \leq k \leq r) \text{ ενδιαφ. η σειρά}\end{array}\right) = \frac{\binom{r}{k} m^{k} n^{r-k}}{(m+n)^{r}}$$

$$\underbrace{\frac{A}{m+n} \quad \frac{\Gamma}{m+n} \quad \dots \quad \frac{A}{m+n}}_{r} \ \text{τρόποι}$$

Αριθμητής

$$\underbrace{A \ A \ A}_{k} \qquad \underbrace{\Gamma \ \Gamma \ \Gamma \ \Gamma}_{r-k}$$

Ικανοποιούνται τα $\Delta_1, \Delta_2, \overset{\text{Ανεξαρτησία}}{\Delta_3}, \Delta_4$ αφού έχω επανατοποθέτηση → Έχω αμετάβλητη πιθανότητα

$E = \{$να διαλέξω A σε οποιαδήποτε επαναλ.$\}$

Έστω X πλήθος των E (πλήθος ανδρών) σε r-επαναλήψεις

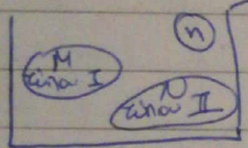
$X \sim B\left(r, p = P(E) = \frac{m}{m+n}\right)$, $P_X(x) = \binom{r}{x} p^x (1-p)^{r-x}$
$x = 0, 1, \dots r$

$$P(X=k) = P_X(k) = \binom{r}{k}\left(\frac{m}{m+n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)^{r-k}$$

$$= \binom{r}{k} \frac{m^k}{(m+n)^k} \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)^{r-k}$$

$$= \binom{r}{k} \frac{m^k}{(m+n)^k} \frac{n^{r-k}}{(m+n)^{r-k}} = \frac{\binom{r}{k} m^k n^{r-k}}{(m+n)^n}$$

Υπεργεωμετρική Κατανομή:



Επιλέγω στην τύχη n ($n \leq M+N$)
επιλέγω μέρος n από $M+N$
χωρίς επανατοποθέτηση

Έστω X το πλήθος των τύπου I στα n που επιλέχτηκαν $P(X=x) = \dfrac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}$ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά

Ορισμός: Η τ.μ. X λέγεται υπεργεωμετρική με παραμέτρους M, N και n ($M, N, n \in \mathbb{N}$, $n \leq M+N$) αν οι τιμές της τ.μ. X είναι φυσικοί με $\max = \{0, n-N\} \leq X \leq \min\{M, n\}$ ← για να έχω $P_X(x) \geq 0$

$\sum P_X(x) = 1$

και σ.π. $P_X(x) = \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}}$

Αν έπαιρνα x-τιμές από τα N θα ήταν $\binom{N}{x}$

Συμβολισμός:
$X \sim Hg(M, N, n)$

Πρόταση (προσέγγιση της υπεργεωμετρικής από τη διωνυμική)

Έστω τ.μ. $X \sim Hg(M, N, n)$. Αν $M \to \infty$, $N \to \infty$ έτσι ώστε $\frac{M}{M+N} \to p$, $0<p<1$

Τότε: $$\lim_{M,N\to\infty} \frac{\binom{M}{x}\cdot\binom{N}{n-x}}{\binom{M+N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Εφαρμογή Υπεργεωμετρικής Κατανομής

Στην εκτίμηση του άγνωστου αριθμού ψαριών μιας λίμνης

U άγνωστος αριθμός ψαριών

Ψαρεύω M (από τα U)) πιάνω

Τα σημαδεύω και τα ρίχνω μέσα) ξανά πάλι

Ξαναψαρεύω n-ψάρια και έστω k-από αυτά σημαδεμένα

Μπορώ να προσεγγίσω το U;

2^o ψάρεμα

λίμνη

M σημαδεμένα	U-M ασημάδευτα

(n) → βλέπω ότι k-στα n είναι σημαδεμένα,

Υπεργεωμετρική κατανομή: Έστω X πλήθος των σημαδεμένων στα n-που ξαναψάρεψα

$X \sim Hg(M, U-M, n)$, $P_X(k) = P(X=k) =$

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{U-M}{n-k}}{\binom{U}{n}}$$

Η πιθανότητα αυτή πρέπει να είναι μέγιστη (κοντά στο 1) αφού βλέπουμε ότι είναι στα n τα k σημαδεμένα. Άρα το U θα προκύψει από μεγιστοποίηση της $P(X=k) \to U = \left[\frac{nM}{k}\right]$